МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Массалітіна Є.В., Гончаренко В.О., Поварова О.А.

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Частина II

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни

«Вища математика» для студентів теплоенергетичного

факультету денної та заочної форм навчання

Київ

НТУУ «КПІ»

2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Частина II

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни
«Вища математика» для студентів теплоенергетичного
факультету денної та заочної форм навчання

*Рекомендовано Науково-методичною радою з математики
фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»*

Київ
НТУУ «КПІ»
2015

Кратні інтеграли. Частина ІІ. Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / Уклад.: Є.В. Массалітіна, В.О. Гончаренко, О.А. Поварова. К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 44 с.

Гриф надано Науково-методичною радою
з математики фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»
Протокол №6 від 26.05.2014 р.

Навчальне видання

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Частина ІІ

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання

Укладачі: *Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук,*
Гончаренко Віра Олександрівна,
Поварова Олена Андріївна, канд. фіз.-мат. наук.

Відповідальний редактор: *Дудкін М.Є., д-р фіз.-мат. наук, доц.*
Рецензент: *Диховичний О.О., канд. фіз.-мат. наук, доц.*

За редакцією укладачів
Надруковано з оригінал-макета замовника

ВСТУП

Методичні вказівки «Кратні інтеграли» укладені для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання з метою забезпечення якісного засвоєння ними даного матеріалу та успішного виконання і оформлення типового розрахунку «Кратні інтеграли», передбаченого навчальною програмою дисципліни «Вища математика».

Методичні вказівки «Кратні інтеграли» складаються з двох частин.

В першій частині методичних вказівок «Подвійний інтеграл та його застосування» стисло викладено основний теоретичний матеріал та наведено широкий спектр розв’язаних навчальних задач, які достатньо розкривають відповідні теоретичні питання та сприяють розвитку практичних навичок.

Друга частина методичних вказівок «Потрійний інтеграл та його застосування» побудована аналогічно першій. В ній також стисло викладено основний теоретичний матеріал та наведена методика розв’язування типових задач.

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

§1. Потрійній інтеграл. Задача, яка приводить до поняття потрійного інтеграла

В першій частині методичних вказівок ми розглянули поняття подвійного інтеграла від функції двох змінних. Визначимо тепер інтеграл від функції трьох змінних – потрійний інтеграл.

Задача про масу матеріального тіла.

Розглянемо замкнену обмежену область тривимірного простору $G \subset R^3$. Нехай в області G задана неперервна функція $\gamma(x,y,z)$, яка визначає густину речовини, що розподілена в області G.

Знайдемо масу m матеріального тіла, яке обмежене областю G.

Відмітимо, що масу однорідного матеріального тіла з густиною $\gamma(x,y,z)=\gamma_0 - const$ обчислюють за формулою $m=\gamma_0 V$, де V – об'єм тіла.

1. Розіб'ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють ΔV_i, $i=\overline{1,n}$.
2. У кожній області G_i виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)\in G_i$. Припустимо, що густина в кожній області G_i стала і дорівнює $\gamma(x_i,y_i,z_i)$. Тоді добуток

$$m_i=\gamma(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i=\gamma(M_i)\Delta V_i$$

є наближеним значенням маси частини тіла, що займає область G_i .

3. Сума $$\sum_{i=1}^{n} m_i=\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i \qquad (1)$$

наближено визначає масу всього тіла.

4. Точне значення маси цього тіла можна дістати, якщо в сумі (1) перейти до границі, при умові $\lambda \to 0$, де $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i)$ – найбільший з діаметрів областей G_i.

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i .$$

Отже, задача про знаходження маси матеріального тіла зведена до знаходження границі суми (1).

§2. Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в замкненій обмеженій області $G \subset R^3$.

1. Розіб'ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють ΔV_i, $i = \overline{1, n}$.
2. У кожній області G_i виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ та обчислимо добуток $f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = f(M_i) \Delta V_i = I_i$.

- Сума $$\sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \qquad (2)$$

називається **інтегральною сумою функції** $u = f(x, y, z)$ по області G.

3. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i)$ – найбільший з діаметрів областей G_i.

- Якщо при $\lambda \to 0$ існує скінченна границя інтегральної суми (2), яка не залежить від способу розбиття області G на частини G_i, вибору точок M_i в них, то ця границя називається **потрійним інтегралом** від функції $f(x, y, z)$ по області G і позначається одним із символів

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV \text{ або } \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dxdydz .$$

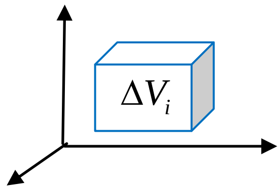
Отже, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i\,.$$

При цьому функція $f(x,y,z)$ називається **інтегровною** в області G, G – областю інтегрування, dV – елементом об'єму.

Зауваження. В ПДСК елементи об'єму виділяють поверхнями

$$x = const, \quad y = const, \quad z = const.$$



Тому елемент об'єму $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$ або $dV = dxdydz$.

Фізичний зміст потрійного інтеграла

Нехай в замкненій обмеженій області G задана неперервна функція $\gamma(x,y,z)$, яка визначає густину речовини, що розподілена в області G. Тоді потрійний інтеграл

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)\,dxdydz = m$$

визначає масу неоднорідного матеріального тіла.

Теорема (достатня умова інтегровності функції).
Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області G, то вона інтегровна в цій області.

§3. Властивості потрійного інтеграла

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір. Теорія потрійного інтеграла аналогічна теорії подвійного інтеграла.

Властивість 1. Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла

$$\iiint\limits_G Cf(x,y,z)\,dxdydz = C\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz, \quad C - const\,.$$

Наслідок. Якщо $f(x,y,z)=1$ для $(x,y,z)\in V$, то $\iiint\limits_G 1\,dxdydz = V_G$, де V_G - об'єм області G.

Властивість 2 (лінійність). Потрійний інтеграл від суми кількох інтегровних функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від цих функцій.

$$\iiint\limits_G (f(x,y,z)\pm g(x,y,z))\,dxdydz = \iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz \pm \iiint\limits_G g(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

Зауваження. Ця властивість має місце для суми довільного скінченного числа функцій.

Властивість 3 (адитивність).

Якщо функція $f(x,y,z)$ інтегровна в області G, а область можна розбити на області G_1 і G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

Зауваження. Ця властивість справедлива для довільного скінченного числа областей, які складають область G і не мають спільних внутрішніх точок.

Властивість 4 (про інтегрування нерівностей).

Якщо функції $f(x,y,z)$ та $g(x,y,z)$ інтегровні в області G та $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$ $\quad\forall\,(x,y,z)\in G$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint\limits_G g(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

Наслідок. Якщо функція $f(x,y,z)\ge 0$, то $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz \ge 0$.

Властивість 5 (оцінка потрійного інтеграла).

Якщо функція $f(x,y,z)$ інтегровна в області G, яка має об'єм V_G, то

$$m \cdot V_G \le \iiint\limits_G f(x,y,z)\, dxdydz \le M \cdot V_G,$$

де m і M – відповідно найменше та найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області G.

Властивість 6 (про середнє значення функції).

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області G, яка має об'єм V_G, то існує така точка $(x^*,y^*,z^*) \in G$, що

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\, dxdydz = f(x^*,y^*,z^*) \cdot V_G.$$

Властивість 7 (про оцінку інтеграла по модулю).

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області G, то функція $|f(x,y,z)|$ інтегровна в цій області і

$$\left| \iiint\limits_G f(x,y,z)\, dxdydz \right| \le \iiint\limits_G |f(x,y,z)|\, dxdydz.$$

§4. Обчислення потрійного інтеграла в прямокутній декартовій системі координат (ПДСК)

Обчислення потрійного інтеграла зводять до обчислення повторних інтегралів.

Нехай область G обмежена знизу та зверху поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz.

Позначимо проекцію області G на площину Oxy через D (рис. 1).

Потрійний інтеграл

Будемо вважати, що функції $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ неперервні в області D, $z_1(x,y) \le z_2(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D$.

- Область $G = \{(x,y,z): \ (x,y) \in D, \ \ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ називається **правильною в напрямі осі** Oz, якщо будь-яка пряма, що проходить через внутрішню точку області G паралельно осі Oz, перетинає її межу не більше, ніж в двох точках $z_{вх}$, $z_{вих}$.

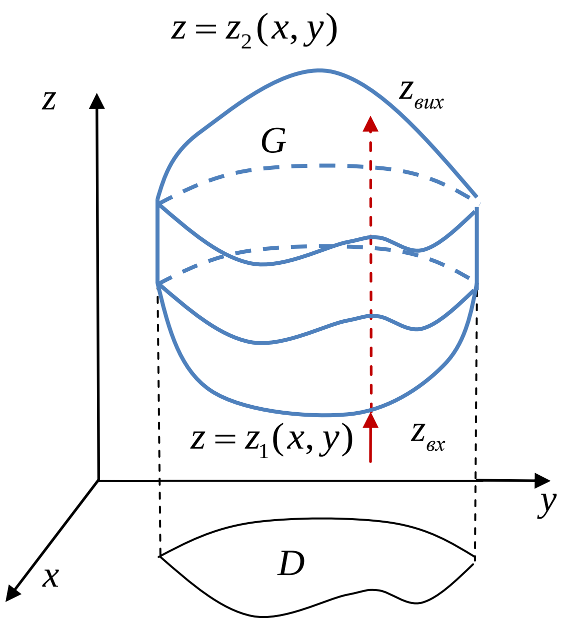


Рис. 1

Виберемо та зафіксуємо довільну точку $M(x,y) \in D$. Проведемо через цю точку промінь, паралельний осі Oz. Він перетне межу області G в двох точках $z_{вх} = z_1(x,y)$ та $z_{вих} = z_2(x,y)$. Для будь-якої неперервної в області G функції $f(x,y,z)$ має зміст інтеграл

$$I(x,y) = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \underset{x,y-фікс.}{f(x,y,z)\,dz}.$$

Змінюючи тепер точку $M(x,y) \in D$, отримаємо

$$\iint\limits_D I(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \underset{x,y-фікс.}{f(x,y,z)\,dz} \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \underset{x,y-фікс.}{f(x,y,z)\,dz} = \iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz$$

формулу, яка зводить обчислення потрійного інтеграла до обчислення подвійного інтеграла від однократного.

Якщо область D, наприклад, обмежена прямими $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ та двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ $\forall\, x\in[a,b]$, то область G буде мати такий вигляд

$$G=\{(x,y,z):\quad a\le x\le b,\quad \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\quad z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}.$$

Тоді, при переході від подвійного інтеграла $\iint\limits_D I(x,y)\,dxdy$ до повторного, дістанемо

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_D I(x,y)\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\underset{x,y-\text{фікс.}}{f(x,y,z)\,dz}\right)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz$$

– формулу переходу від потрійного інтеграла до повторного.

Аналогічно можна отримати формули для обчислення потрійного інтеграла по області, яка є правильною в напрямі осей Ox та Oy.

Якщо область G не є правильною в напрямі жодної з координатних осей, то її розбивають на декілька областей, кожна з яких є правильною в напрямі принаймні однієї осі та використовують властивість адитивності потрійного інтеграла.

§5. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай в замкненій обмеженій області G задана неперервна функція $f(x,y,z)$. Тоді існує потрійний інтеграл $I=\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$.

Поставимо задачу: перейти в інтегралі I від змінних x,y,z до нових змінних u,v,w за допомогою формул перетворення координат

$$\begin{cases} x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w). \end{cases}\tag{3}$$

Теорема (про заміну змінних в потрійному інтегралі).

Нехай виконуються такі умови:

1. Перетворення (3) переводить замкнену обмежену область G в замкнену обмежену область G^* і є взаємно однозначним;

2. Функції (3) мають в області G неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник Якобі[1]

$$J(u,u,w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}\neq 0; \qquad (4)$$

3. Функція $z=f(x,y)$ неперервна в області G.

Тоді справедлива така ***формула заміни змінних:***

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{G^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\cdot|J(u,v,w)|\,dudvdw.$$

Отже, щоб виконати заміну змінних в потрійному інтегралі, потрібно:

1. Стару область інтегрування G замінити відповідною їй областю G^*.
2. В підінтегральній функції $f(x,y,z)$ від змінних x,y,z перейти до змінних u,v,w.
3. Елемент об'єму $dxdydz$ в координатах x,y,z замінити елементом об'єму $|J(u,u,w)|\,dudvdw$ в координатах u,v,w.

На практиці найчастіше використовують циліндричну та сферичну системи координат.

[1] Карл Густав Якоб Якобі (1804–1851) – німецький математик, який зробив значний внесок до комплексного аналізу, лінійної алгебри, динаміки і інших розділів математики і механіки.

§6. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричній системі координат (ЦСК)[2]

В системі $Oxyz$ виберемо точку $M(x,y,z)$. Спроектуємо точку M на площину Oxy (рис. 2).

- **Циліндричними координатами точки** $M(x,y,z)$ називають упорядковану трійку чисел ρ, φ, z, де ρ, φ – полярні координати точки N – проекції точки M на площину Oxy:

$\rho = |\overrightarrow{ON}| = \sqrt{x^2+y^2}$ – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{ON}$;

$\varphi = \angle(Ox, \overrightarrow{ON})$ – кут між додатним напрямом осі Ox та вектором $\overrightarrow{ON}$;

z – апліката точки M.

Формули зв'язку ПДСК та ЦСК

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi, \\ y = \rho\sin\varphi, & 0 \le \rho < +\infty, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

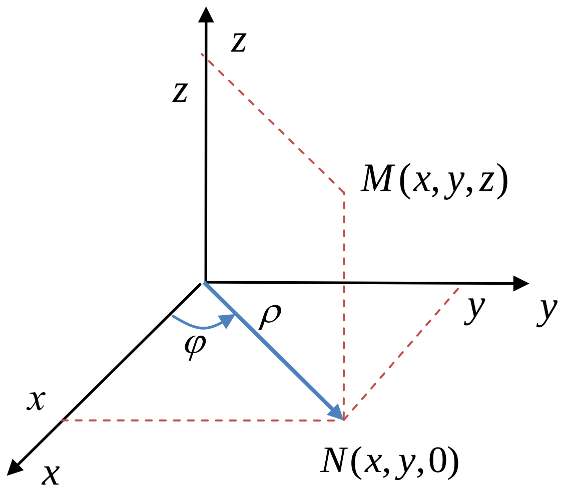


Рис. 2

Обчислимо якобіан цього перетворення

$$J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$$

[2] Назва «циліндричні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = const$ є циліндр, прямолінійні твірні якого паралельні осі Oz.

$$\Rightarrow \quad J(\rho,\varphi,z)=\rho \quad \Rightarrow \quad |J(\rho,\varphi,z)|=\rho .$$

Формула переходу в потрійному інтегралі від ПДСК до ЦСК

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\cdot\rho d\rho d\varphi dz .$$

Зауваження. ЦСК доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння поверхні містить суму x^2+y^2, оскільки ця сума в ЦСК має простий вигляд: $x^2+y^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho^2$.

§7. Обчислення потрійного інтеграла в узагальненій циліндричній системі координат (УЦСК)

Формули заміни декартових координат узагальненими циліндричними мають вигляд

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi, & 0\le\varphi<2\pi, \\ y=b\rho\sin\varphi, & 0\le\rho<+\infty, \\ z=cz, \quad a,b,c>0, & z\in R. \end{cases}$$

Якобіан переходу

$$J(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi & 0 \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=$$

$$=c(ab\rho\cos^2\varphi+ab\rho\sin^2\varphi)=abc\rho.$$

Формула переходу в потрійному інтегралі від ПДСК до УЦСК

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G^*} f(\rho a\cos\varphi,\rho b\sin\varphi,cz)\cdot abc\rho\, d\rho d\varphi dz .$$

Зауваження. УЦСК доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння поверхні містить суму $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, оскільки ця сума в УЦСК має простий вигляд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=\rho^2$.

§8. Обчислення потрійного інтеграла в сферичній системі координат (ССК)[3]

В системі $Oxyz$ виберемо точку $M(x,y,z)$ та проведемо площину через цю точку та вісь Oz (рис. 3).

• **Сферичними координатами точки** $M(x,y,z)$ у просторі називають упорядковану трійку чисел ρ, φ, θ, де

$\theta = \angle(Oz,\overrightarrow{OM})$ – кут між віссю Oz і радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$;

$\rho = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$;

$\varphi = \angle(Ox,\overrightarrow{ON})$ – кут між додатним напрямом осі Ox та вектором $\overrightarrow{ON}$.

Знайдемо залежність між прямокутними та сферичними координатами точки M. Позначимо $|\overrightarrow{ON}| = r$, $r^2 = x^2 + y^2$.

З прямокутних $\Delta\ ONP$ та $\Delta\ OMN$ маємо

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad r = \rho\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\theta.$$

Тоді **формули зв'язку ПДСК та ССК** записують у вигляді

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi < 2\pi, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \theta \le \pi, \\ z = \rho\cos\theta, & 0 \le \rho < +\infty. \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

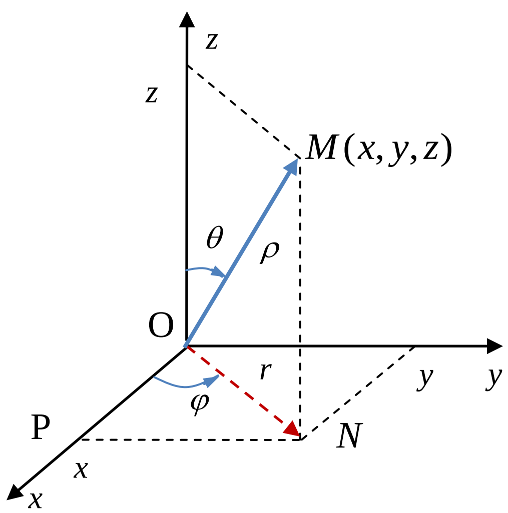


Рис. 3

Обчислимо якобіан цього перетворення

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

[3] Назва «сферичні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = const$ є сферою.

$$=\rho^2\cos\theta\begin{vmatrix}-\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta\end{vmatrix}-\rho^2\sin\theta\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta\end{vmatrix}=$$

$$=\rho^2\cos^2\theta\sin\theta\begin{vmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\varphi & \sin\varphi\end{vmatrix}-\rho^2\sin^3\theta\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=-\rho^2\cos^2\theta\sin\theta-\rho^2\sin^3\theta=-\rho^2\sin\theta$$

$$\Rightarrow\quad J(r,\varphi,\theta)=-\rho^2\sin\theta\quad\Rightarrow\quad |J(r,\varphi,\theta)|=\rho^2\sin\theta.$$

Формула переходу в потрійному інтегралі від ПДСК до ССК

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\;d\rho d\varphi d\theta.$$

Зауваження. При обчисленні потрійного інтеграла в ЦСК чи ССК область G^*, як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю G.

Зауваження. ССК доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння поверхні містить суму $x^2+y^2+z^2$, оскільки ця сума в ССК має простий вигляд:

$$x^2+y^2+z^2=(\rho^2\cos^2\varphi\underline{\sin^2\theta}+\rho^2\sin^2\varphi\underline{\sin^2\theta})+\rho^2\cos^2\theta=$$

$$=\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2.$$

§9. Обчислення потрійного інтеграла в узагальненій сферичній системі координат (УССК)

Формули заміни декартових координат узагальненими сферичними мають вигляд

$$\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi\sin\theta, & 0\le\varphi<2\pi,\\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\theta<\pi,\\ z=c\rho\cos\theta, & a,b,c>0,\quad 0\le\rho<+\infty.\end{cases}$$

Якобіан переходу $J(\rho,\varphi,\theta) = -abc\rho^2\sin\theta, \quad |J(\rho,\varphi,\theta)| = abc\rho^2\sin\theta$.

Формула переходу в потрійному інтегралі від ПДСК до УССК

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_{G^*} f(a\rho\cos\varphi\sin\theta, b\rho\sin\varphi\sin\theta, c\rho\cos\theta)\cdot abc\rho^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta.$$

Зауваження. УССК доцільно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння поверхні містить суму $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, оскільки ця сума в УССК має простий вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{c^2\rho^2\cos^2\theta}{c^2} = \rho^2.$$

§10. Застосування потрійного інтеграла

Розглянемо замкнену обмежену область $G \subset R^3$.

1. Обчислення об'ємів. Якщо деяке тіло обмежене областю G, то об'єм тіла

$$V = \iiint_G dxdydz \overset{\text{ЦСК}}{=} \iiint_{G^*} \rho\,d\rho d\varphi dz \overset{\text{ССК}}{=} \iiint_{G^*} \rho^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta.$$

2. Застосування в механіці. Нехай в області G задана неперервна функція $\gamma(x,y,z)$, яка визначає густину речовини, що розподілена в цій області.

Масу неоднорідного матеріального тіла G знаходять за формулою

$$m = \iiint_G \gamma(x,y,z)\,dxdydz.$$

Аналогічно формулам знаходження статичних моментів матеріальної пластини можна дістати формули для знаходження **статичних моментів матеріального тіла**

$$M_{xy} = \iiint_G z\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz \quad \text{– відносно площини } Oxy,$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_G x\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ – відносно площини Oyz,

$$M_{xz}=\iiint\limits_G y\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ – відносно площини Oxz.

Координати центра маси неоднорідного матеріального тіла

$$\overline{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\iiint\limits_G x\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)\,dxdydz},$$

$$\overline{y}=\frac{M_{xz}}{m}=\frac{\iiint\limits_G y\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)\,dxdydz},$$

$$\overline{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{\iiint\limits_G z\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_G \gamma(x,y,z)\,dxdydz}.$$

Моменти інерції матеріального тіла відносно координатних осей

$$I_{Ox}=\iiint\limits_G (z^2+y^2)\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ – відносно осі Ox,

$$I_{Oy}=\iiint\limits_G (x^2+z^2)\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ – відносно осі Oy,

$$I_{Oz}=\iiint\limits_G (x^2+y^2)\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ – відносно осі Oz,

$$I_0=\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ – відносно початку координат.

Моменти інерції матеріального тіла відносно координатних площин

$$I_{xy}=\iiint\limits_G z^2\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ – відносно площини Oxy,

$$I_{yz}=\iiint\limits_G x^2\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ відносно площини Oyz,

$$I_{xz}=\iiint\limits_G y^2\cdot\gamma(x,y,z)\,dxdydz$$ – відносно площини Oxz.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

§1. Обчислення потрійного інтеграла в ПДСК. Застосування потрійного інтеграла

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G zdzdxdy$, якщо область G обмежена поверхнями $x=1,\quad y=x,\quad y=2x,\quad z=0,$ $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$.

Розв'язок. Побудуємо область G (рис. 4) та її проекцію на площину Oxy (рис. 5).

Область G — правильна в напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

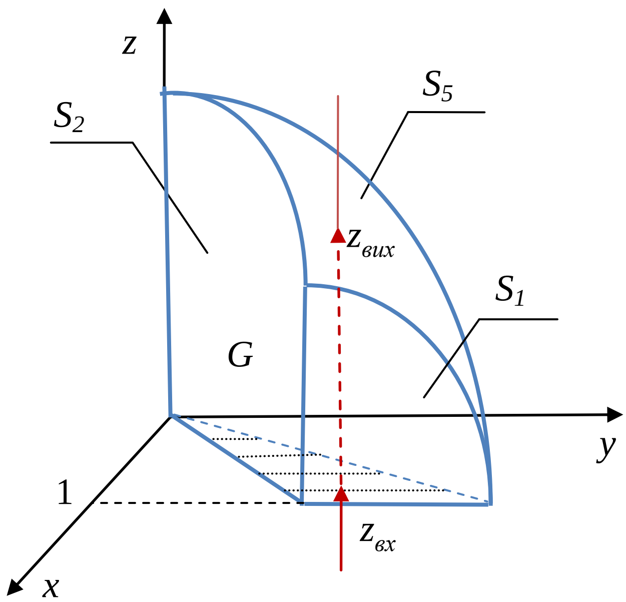


Рис. 4

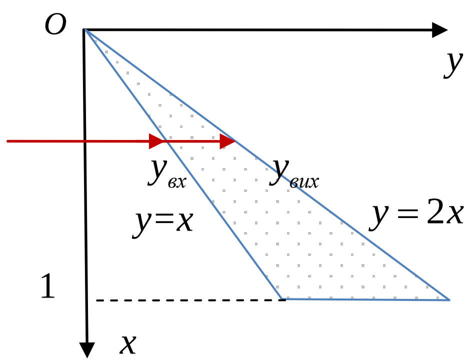


Рис. 5

$S_1:\quad x=1$ — площина, яка паралельна площині Oyz;

$S_2:\quad y=x,\qquad S_3:\quad y=2x$ — площини, які проходять через вісь Oz;

$S_4:\quad z_{вх}=0$ — координатна площина Oxy;

$S_5: \quad z_{вих} = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ — півсфера з центром в точці $O(0,0,0)$ і радіусом $R = \sqrt{5}$.

Опишемо область інтегрування

$$G = \left\{ (x, y, z): \quad 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2x, \quad 0 \le z \le \sqrt{5 - x^2 - y^2} \right\}$$

та розставимо межі інтегрування в потрійному інтегралі. За формулою переходу від потрійного інтеграла до повторного

$$J = \iiint_G z\, dzdxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{5-x^2-y^2}} zdz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{5-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_x^{2x} (5 - x^2 - y^2)\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (5y - yx^2 - \frac{y^3}{3})\Bigg|_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (5x - x^3 - \frac{7x^3}{3})\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5x^2}{2} - \frac{10}{3}\frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{6} \right) = \frac{5}{6}.$$

Відповідь: $J = \dfrac{5}{6}$.

При обчисленні потрійного інтеграла **важливо** обирати той напрямок інтегрування, який дозволяє спростити обчислення.

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_G 2x^2 \operatorname{sh}(xy)\, dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями $x = 3$, $y = \dfrac{x}{3}$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$.

Розв'язок. Побудуємо область G (рис. 6) та її проекцію на площину Oxy (рис. 7).

Область G — правильна в напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

$S_1: \quad x = 3$ — площина, яка паралельна площині Oyz;

$S_2: \quad y = \dfrac{x}{3}$, — площина, яка проходить через вісь Oz;

$S_3: \quad y = 0$, $\qquad S_4: \quad z_{вх} = 0$ — координатні площини Oxz, Oxy;

$S_5: \quad z_{вих} = 3$ — площина, яка паралельна площині Oxy.

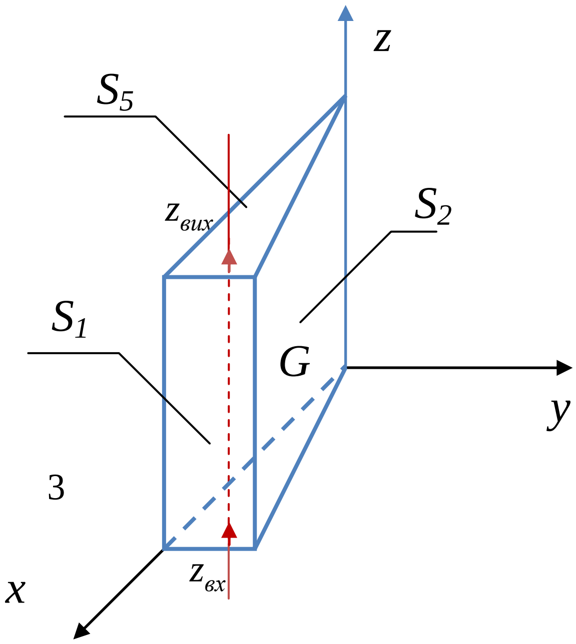


Рис. 6

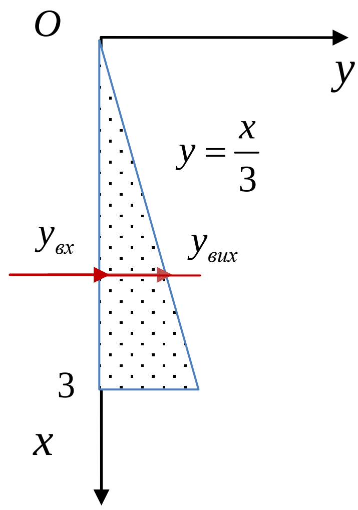


Рис. 7

Опишемо область інтегрування G двома способами:

$$G_{xz} = \{(x, y, z): \quad 0 \le y \le 1, \quad 3y \le x \le 3, \quad 0 \le z \le 3\},$$

$$G_{yz} = \left\{x, y, z): \quad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le \frac{x}{3}, \quad 0 \le z \le 3\right\}$$

та розставимо межі інтегрування в потрійному інтегралі. За формулою переходу від потрійного інтеграла до повторного

$$J = \iiint\limits_G 2x^2 \operatorname{sh}(xy)\, dxdydz = \underbrace{2\int_0^1 dy \int_{3y}^{3} x^2 \operatorname{sh}(xy)\, dx \int_0^3 dz}_{J_{xz}}.$$

$$J = \iiint\limits_G 2x^2 \operatorname{sh}(xy)\, dxdydz = \underbrace{2\int_0^3 x^2 dx \int_0^{\frac{x}{3}} \operatorname{sh}(xy)\, dy \int_0^3 dz}_{J_{yz}}.$$

Обчислення інтеграла J_{xz} не приведе до бажаного результату (переконайтеся самостійно), тому

$$J=\iiint\limits_G 2x^2\,\mathrm{sh}(xy)\,dxdydz=2\int\limits_0^3 x^2dx\int\limits_0^{\frac{x}{3}}\mathrm{sh}(xy)\,dy\int\limits_0^3 dz=$$

$$=6\int\limits_0^3 xdx\int\limits_0^{\frac{x}{3}}\mathrm{sh}(xy)\,d(xy)=6\int\limits_0^3 x\,\mathrm{ch}(xy)\,\Big|_0^{\frac{x}{3}}\,dx=$$

$$=6\int\limits_0^3 x(\mathrm{ch}\frac{x^2}{3}-1)\,dx=9\int\limits_0^3\mathrm{ch}\frac{x^2}{3}\,d\left(\frac{x^2}{3}\right)-6\int\limits_0^3 x\,dx=$$

$$=9\,\mathrm{sh}\frac{x^2}{3}\Bigg|_0^3-3x^2\Big|_0^3=9\,\mathrm{sh}\,3-27.$$

Відповідь: $J=9\,\mathrm{sh}\,3-27.$

Приклад 3. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=9-y^2$, $x=0$, $y=0$ $(y\ge 0)$, $z=0$, $3x+4y=12$.

Розв'язок. Побудуємо область G (рис. 8) та її проекцію на площину Oxy (рис. 9). Область G — правильна в напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

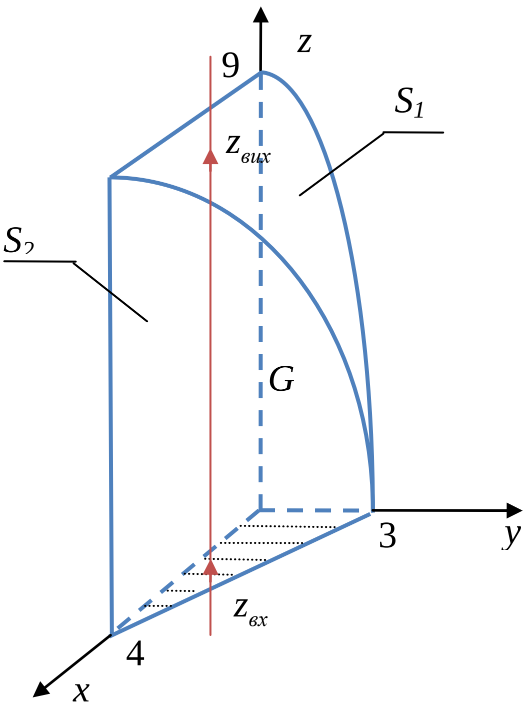


Рис. 8

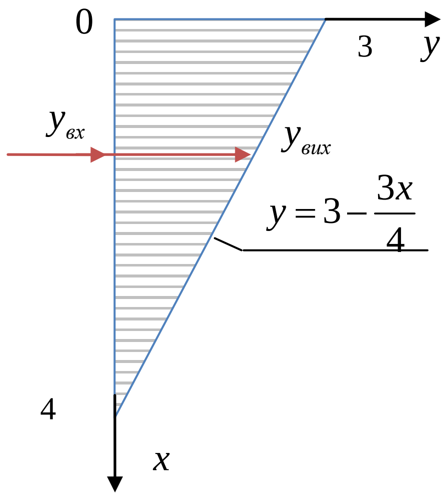


Рис. 9

$S_1:\quad z = 9 - y^2$ — параболічний циліндр, напрямною якого є парабола $\begin{cases} z = 9 - y^2, \\ x = 0 \end{cases}$ в площині Oyz, а твірні паралельні осі Ox;

$S_2:\quad 3x + 4y = 12$ — площина, яка паралельна осі Oz та відтинає на осях Ox, Oy відрізки довжиною 4 та 3;

$S_3:\quad x = 0,\quad S_4:\quad y = 0,\quad (y \ge 0),\quad S_5:\quad z = 0$ – координатні площини Oyz, Oxz, Oxy.

Об'єм тіла будемо обчислювати за формулою $V = \iiint\limits_G dxdydz$, де область G має такий вигляд

$$G = \left\{ (x, y, z): \quad 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 3 - \frac{3x}{4}, \quad 0 \le z \le 9 - y^2 \right\}.$$

За формулою переходу від потрійного інтеграла до повторного

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{3-\frac{3x}{4}} dy \int\limits_0^{9-y^2} dz =$$

$$= \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{3-\frac{3x}{4}} z \,\Big|_0^{9-y^2} dy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{3-\frac{3x}{4}} (9 - y^2)\, dy = \int\limits_0^4 \left(9y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{3-\frac{3x}{4}} dx =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(27 - \frac{27x}{4} - 9\left(1 - \frac{x}{4}\right)^3 \right) dx = \left(27\left(x - \frac{x^2}{8} \right) + 9\left(1 - \frac{x}{4}\right)^4 \right) \Bigg|_0^4 = 45\,(\text{од}^3).$$

Відповідь: $V = 45$ (од^3).

Приклад 4. Знайти момент інерції відносно осі Oz тіла, обмеженого поверхнями $z^2 = 6x$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 0$, $z = 0$. Об'ємна густина тіла в кожній точці пропорційна її відстані від площини Oxy.

Розв'язок. Побудуємо область G (рис. 10). Область G — правильна в напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

$S_1:\quad z^2 = 6x$ — параболічний циліндр, напрямною якого є парабола

$\begin{cases} z^2 = 6x, \\ y = 0 \end{cases}$ в площині Oxz, а твірні паралельні осі Oy;

$S_2: \quad x = 2$ — площина, яка паралельна площині Oyz;

$S_3: \quad y = 1$ — площина, яка паралельна площині Oxz;

$S_4: \quad y = 0, \quad S_5: \quad z = 0$ — координатні площини Oxz, Oxy.

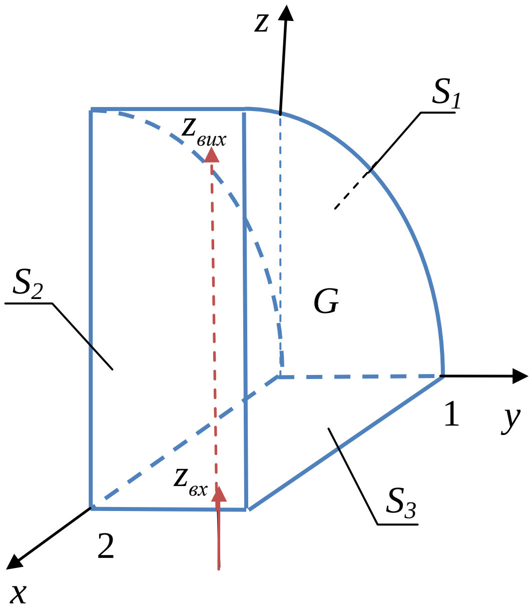


Рис. 10

Момент інерції тіла відносно осі Oz будемо обчислювати за формулою

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)\, dxdydz.$$

За умовою задачі густина в кожній точці визначається функцією $\mu(x, y, z) = kz$, де $k - const$.

Опишемо область інтегрування

$$G = \{(x, y, z): \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le \sqrt{6x}\}.$$

Обчислимо момент інерції тіла відносно осі Oz, використовуючи формулу переходу від потрійного інтеграла до повторного

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) \cdot k\, z\, dxdydz =$$

$$= k\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)\, dy \int_0^{\sqrt{6x}} z\, dz = k\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{6x}} dy =$$

$$= 3k\int_0^2 x\, dx \int_0^1 (x^2 + y^2)\, dy = 3k\int_0^2 \left.\left(x^3 y + x\frac{y^3}{3} \right)\right|_0^1 dx =$$

$$= 3k\int_0^2 \left(x^3 + \frac{x}{3} \right) dx = 3k\left.\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{6} \right)\right|_0^2 = 14k.$$

Відповідь: $I_z = 14k$.

Приклад 5. Знайти масу та координати центра маси однорідного тіла T, обмеженого поверхнями $y^2+z^2=4$, $x^2+z^2=4$, $z=0$ $(z\geq 0)$.

Розв'язок. Тіло T обмежене поверхнями:

S_1: $y^2+z^2=4$ — коловий циліндр, напрямною якого є коло $\begin{cases} y^2+z^2=4, \\ x=0 \end{cases}$ в площині Oyz, а твірні паралельні осі Ox;

S_2: $x^2+z^2=4$ — коловий циліндр, напрямною якого є коло $\begin{cases} x^2+z^2=4, \\ y=0 \end{cases}$ в площині Oxz, а твірні паралельні осі Oy;

S_3: $z=0$ – координатна площина Oxy.

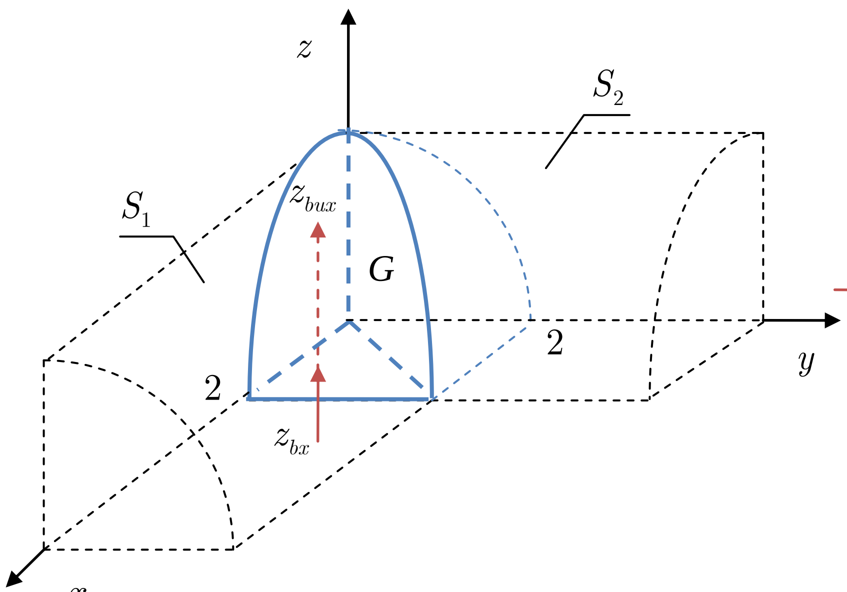


Рис.11

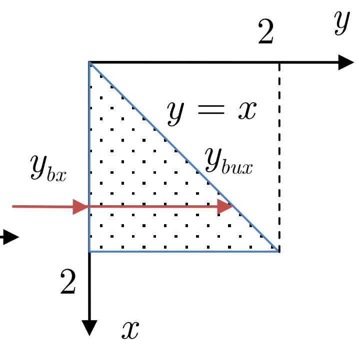


Рис.12

Оскільки тіло T симметричне, побудуємо його одну восьму частину G (рис. 11) та її проекцію на площину Oxy (рис. 12).

1. Масу m_G тіла G з густиною $\mu(x,y,z)=\mu_0$ будемо шукати за формулою:

$$m_G=\mu_0\iiint\limits_G dxdydz\,.$$

Опишемо область інтегрування:

$$G=\{(x,y,z):\quad 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le x,\quad 0\le z\le \sqrt{4-x^2}\}.$$

За формулою переходу від потрійного інтеграла до повторного

$$m_G=\mu_0\iiint\limits_G dxdydz=\mu_0\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dz=\mu_0\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x\sqrt{4-x^2}dy=\mu_0\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\,x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\mu_0\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\;d(4-x^2)=-\mu_0\frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{3}\Bigg|_0^2=\frac{8\mu_0}{3}\text{(од. маси).}$$

Отже, маса тіла T: $\quad m_T=8m_G=\dfrac{64\mu_0}{3}$ (од. маси).

2. Обчислимо статичний момент матеріального тіла G відносно площини Oxy

$$M_{xy}=\mu_0\iiint\limits_G z\,dxdydz=\mu_0\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} z\,dz=\frac{1}{2}\mu_0\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^x(4-x^2)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\mu_0\int\limits_0^2(4-x^2)x\,dx=\frac{1}{2}\mu_0\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=2\mu_0.$$

3. Знайдемо координати центра маси. Оскільки задане тіло T симетричне відносно осі Oz, то центр його маси лежатиме на осі Oz, тобто $\overline{x}=\overline{y}=0$. Обчислимо координату $\overline{z}$

$$\overline{z}=\frac{1}{m}M_{xy}=2\mu_0\frac{3}{64\mu_0}=\frac{3}{32}.$$

Отже, координати центра маси тіла T $\quad\left(0,0,\dfrac{3}{32}\right)$.

Відповідь:

1. $m_T=\dfrac{64}{3}\mu_0$ (од. маси);

2. Координати центра маси $\left(0,0,\dfrac{3}{32}\right)$.

§2. Обчислення потрійного інтеграла в ЦСК, УЦСК, ССК, УССК. Застосування потрійного інтеграла

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\quad az=x^2+y^2$.

Розв'язок. Побудуємо область G та її проекцію D на площину Oxy (рис. 13). Область G — правильна в напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

$S_1: \ z=\sqrt{x^2+y^2}$ — коловий півконус з віссю симметрії Oz;

$S_2: \ z=\dfrac{1}{a}(x^2+y^2)$ — параболоїд обертання з віссю симметрії Oz та вершиною в точці $O(0,0,0)$.

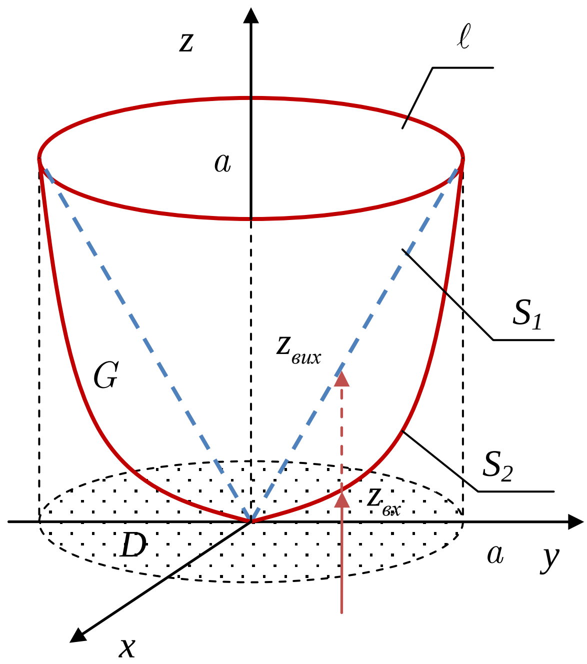


Рис. 13

Перейдемо до **циліндричної системи координат**

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases} \qquad \begin{gathered} x^2+y^2=\rho^2, \\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz. \end{gathered}$$

Запишемо кожну поверхню в циліндричній системі координат:

$$S_1: \quad z=\sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \qquad z=\rho;$$

$$S_2: \quad z=\frac{1}{a}(x^2+y^2) \Rightarrow \qquad z=\frac{\rho^2}{a}.$$

Знайдемо лінію ℓ перетину заданих поверхонь S_1 та S_2:

$$\begin{cases} z=\rho, \\ z=\dfrac{\rho^2}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\rho, \\ \rho(1-\dfrac{\rho}{a})=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \ell: \ \begin{cases} z=a, \\ \rho=a. \end{cases}$$

Отже, ℓ — коло радіуса $R = a$, яке лежить у площині $z = a$. Проекцією даного тіла на площину Oxy є область D.

Область інтегрування в ЦСК буде мати такий вигляд

$$G^* = \left\{(\rho,\varphi,z):\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad 0 \le \rho \le a,\quad \frac{\rho^2}{a} \le z \le \rho\right\}.$$

Використовуючи формулу обчислення об'єма та формулу обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах, отримаємо

$$V = \iiint\limits_G dxdydz \overset{ЦСК}{=} \iiint\limits_{G^*} \rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{a}}^{\rho} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho z\Big|_{\frac{\rho^2}{a}}^{\rho} d\rho = 2\pi \int\limits_0^a \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{a}\right) d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^3}{6} \text{ (од}^3\text{)}.$$

Відповідь: $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$ (од^3).

Приклад 2. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \dfrac{9}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \dfrac{11}{2} - x^2 - y^2$. Виконати рисунок даного тіла та його проекції на площину Oxy.

Розв'язок. Побудуємо область G та її проекцію на площину Oxy (рис. 14). Область G — правильна в напрямі осі Oz та обмежена поверхнями:

S_1: $z = \dfrac{9}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ — коловий півконус з віссю симметрії Oz;

S_2: $z = \dfrac{11}{2} - x^2 - y^2$ — параболоїд з віссю симметрії Oz та вершиною в точці $O_1\left(0,0,\dfrac{11}{2}\right)$.

Перейдемо до **циліндричної системи координат**

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

$$dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Запишемо кожну поверхню в циліндричній системі координат:

$$S_1: \quad z = \frac{9}{2}\sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{9}{2}\rho;$$

$$S_2: \quad z = \frac{11}{2} - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{11}{2} - \rho^2.$$

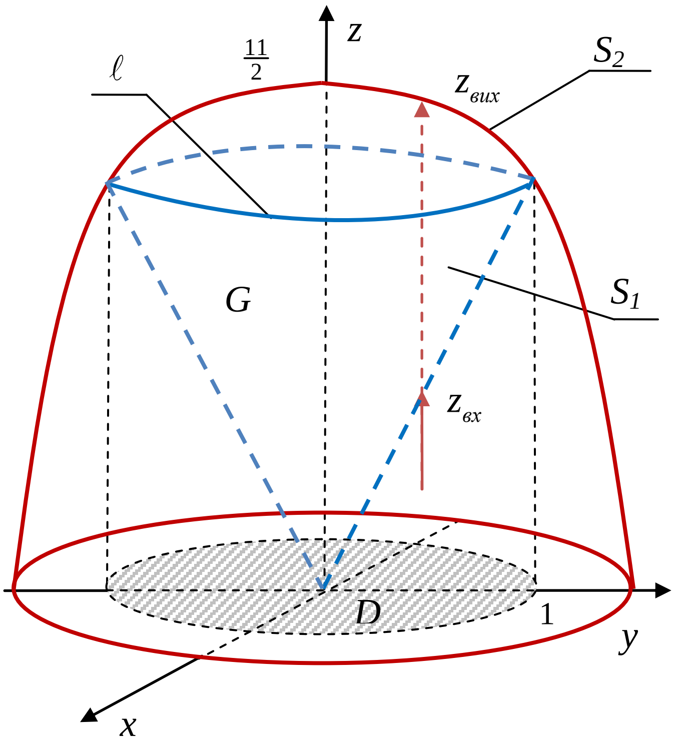


Рис. 14

Знайдемо лінію ℓ перетину заданих поверхонь S_1 та S_2:

$$\begin{cases} z = \frac{9}{2}\rho, \\ z = \frac{11}{2} - \rho^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{9}{2}\rho, \\ 2\rho^2 + 9\rho - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ell: \begin{cases} z = \frac{9}{2}, \\ \rho = 1. \end{cases}$$

Отже, ℓ — коло радіуса $R = 1$, яке лежить у площині $z = \frac{9}{2}$. Проекцією даного тіла на площину Oxy є область D.

Область інтегрування в ЦСК матиме такий вигляд

$$G^* = \left\{ (\rho, \varphi, z): \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad \frac{9}{2}\rho \le z \le \frac{11}{2} - \rho^2 \right\}.$$

Використовуючи формулу обчислення об'єма та формулу обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах, отримаємо

$$V = \iiint\limits_G dxdydz \overset{ЦСК}{=} \iiint\limits_{G^*} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\frac{9}{2}\rho}^{\frac{11}{2}-\rho^2} dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho z \Big|_{\frac{9}{2}\rho}^{\frac{11}{2}-\rho^2} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{11}{2}\rho - \rho^3 - \frac{9}{2}\rho^2 \right) d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\frac{11}{4}\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{3}{2}\rho^3\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{11}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) = 2\pi \text{ (од}^3\text{)}.$$

Відповідь: $V = 2\pi$ (од^3).

Приклад 3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{z}{4} = x^2 + y^2$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$.

Розв'язок. Побудуємо поверхні S_1 та S_2 (рис. 15):

S_1: $\frac{z}{4} = x^2 + y^2$ — параболоїд обертання з віссю симетрії Oz та вершиною в точці $O(0,0,0)$;

S_2: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ — еліптичний циліндр, напрямною якого є еліпс $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ в площині Oxy, а твірні паралельні осі Oz.

S_3: $z = 0$ – координатна площина Oxy.

Перейдемо до **узагальненої циліндричної системи координат**

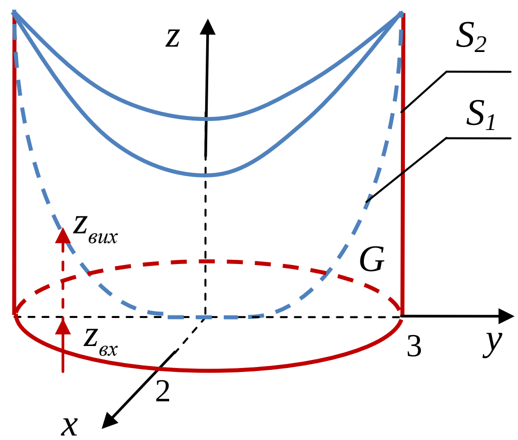


Рис. 15

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi = 2\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi = 3\rho\sin\varphi, \\ z = cz = 4z, \end{cases}$$

$$dxdydz = abc\rho \cdot d\rho d\varphi dz = 24\rho \cdot d\rho d\varphi dz.$$

Запишемо рівняння кожної поверхні в узагальненій циліндричній системі координат:

$$S_1: \ \frac{4z}{4} = 4\rho^2\cos^2\varphi + 9\rho^2 sin^2\varphi \ \Rightarrow \ z = \rho^2(4 - 4sin^2\varphi + 9sin^2\varphi) \ \Rightarrow$$

$$S_1: \ z = \rho^2(4 + 5sin^2\varphi);$$

$$S_2:\ \frac{4\rho^2\cos^2\varphi}{4}+\frac{9\rho^2 sin^2\varphi}{9}=1 \ \Rightarrow\ \rho^2=1 \ \Rightarrow\ \rho=1.$$

Опишемо область G в узагальненій циліндричній системі координат:

$$G^*=\{(\rho,\varphi,z):\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\rho\le 1,\ \ 0\le z\le \rho^2(4+5sin^2\varphi)\}.$$

Об'єм тіла обчислимо за формулою

$$V=\iiint\limits_G dxdydz \overset{УЦСК}{=} \iiint\limits_{G^*} 24\rho\, d\rho d\varphi dz = 24\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\rho^2(4+5sin^2\varphi)} dz =$$

$$=24\int_0^{2\pi}(4+5sin^2\varphi)\, d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho = 24\int_0^{2\pi}\left(4+\frac{5}{2}(1-\cos 2\varphi)\right)\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$=6\int_0^{2\pi}\left(\frac{13}{2}-\frac{5}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = 6\left(\frac{13}{2}\varphi-\frac{5}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 78\pi\ (\text{од}^3).$$

Відповідь: $V=78\pi$ (од^3).

Приклад 4. Обчислити масу неоднорідного тіла з густиною $\mu(x,y,z)=2z$, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $z=2$, $y=0$ $(y\ge 0,\ \ z\ge 0)$.

Розв'язок. Побудуємо тіло G (рис. 16), яке обмежене поверхнями:

$S_1:\ \ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+z^2=1$ — еліпсоїд з ценром в точці $O(0,0,0)$ і півосями $a=4,\ \ b=3,\ \ c=1;$

$S_2:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ — еліптичний

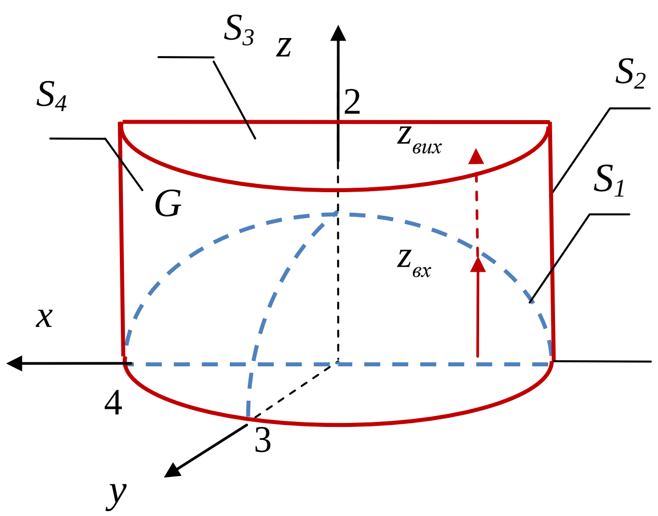


Рис. 16

циліндр, напрямною якого є еліпс $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ в площині Oxy, а твірні паралельні осі Oz;

S_3: $z = 2$ – площина, паралельна площині Oxy;

S_4: $y = 0$ – координатна площина Oxz.

Перейдемо до **узагальненої циліндричної системи координат**:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi = 4\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi = 3\rho\sin\varphi, \\ z = cz = z, \end{cases}$$

$$dxdydz = abc\rho d\rho d\varphi dz = 12\rho\, d\rho d\varphi dz.$$

Рівняння поверхонь та область інтегрування в узагальненій циліндричній системі координат будуть мати такий вигляд:

$$S_1: \quad \frac{16\rho^2\cos^2\varphi}{16} + \frac{9\rho^2\sin^2\varphi}{9} + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{1-\rho^2};$$

$$S_2: \quad \frac{16\rho^2\cos^2\varphi}{16} + \frac{9\rho^2\sin^2\varphi}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = 1.$$

$$G^* = \left\{(\rho,\varphi,z):\quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le \rho \le 1, \quad \sqrt{1-\rho^2} \le z \le 2\right\}.$$

Знайдемо масу неоднорідного тіла з густиною $\mu(x,y,z) = 2z$. Для цього скористаємося формулою переходу від декартової до узагальненої циліндричної системи координат

$$m_G = \iiint\limits_G \mu(x,y,z)\, dxdydz \overset{УЦСК}{=} \iiint\limits_{G^*} \mu(\varphi,\rho,z)\cdot abc\rho \cdot d\varphi d\rho dz =$$

$$= \iiint\limits_{G^*} 2z \cdot 12\rho\, d\varphi d\rho dz = 24\int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_{\sqrt{1-\rho^2}}^2 z\, dz = 24\pi\int_0^1 \rho \left.\frac{z^2}{2}\right|_{\sqrt{1-\rho^2}}^2 d\rho =$$

$$= 12\pi\int_0^1 \rho(3+\rho^2)d\rho = 12\pi\left.\left(3\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^1 = 12\pi\frac{7}{4} = 21\pi \text{ (од. маси).}$$

Відповідь: $m_G = 21\pi$ (од. маси).

Приклад 5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G \frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2+z^2=4$.

Розв'язок. Область G (рис. 17) обмежена поверхнями:

S_1: $x^2+y^2+z^2=2$ – сфера з центром в точці $O(0,0,0)$ і радіусом $R_1=\sqrt{2}$;

S_2: $x^2+y^2+z^2=4$ – сфера з центром в точці $O(0,0,0)$ і радіусом $R_2=2$.

Перейдемо до **сферичної системи координат**

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\theta, \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2.$$

Елемент об'єму в сферичних координатах дорівнює

$$dxdydz=\rho^2\sin\theta d\varphi d\theta d\rho.$$

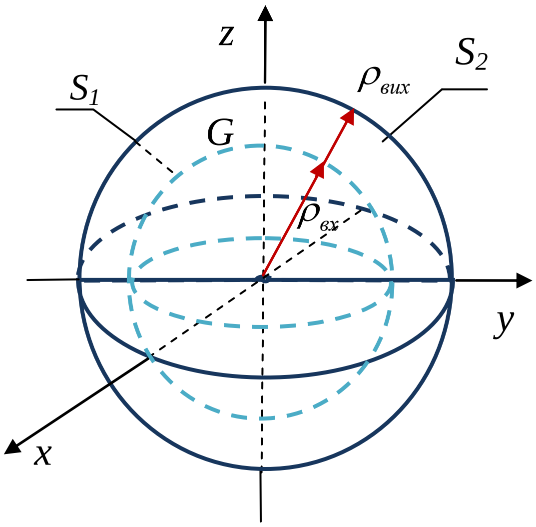


Рис. 17

Рівняння поверхонь S_1, S_2 та область інтегрування G в сферичній системі координат будуть мати вигляд

$$S_1: \quad \rho=\sqrt{2},$$
$$S_2: \quad \rho=2,$$

$$G^*=\{(\rho,\varphi,\theta):\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\pi,\quad \sqrt{2}\le\rho\le 2\}.$$

Скористаємося формулою переходу від декартової до сферичної системи координат:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz \overset{ССК}{=} \iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta.$$

Отримаємо

$$J=\iiint\limits_{G}\frac{xyz}{x^2+y^2}\,dxdydz\overset{CCK}{=}\iiint\limits_{G^*}\frac{\rho\cos\varphi\sin\theta\cdot\rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\rho\cos\theta}{(\rho\cos\varphi\sin\theta)^2+(\rho\sin\varphi\sin\theta)^2}\rho^2\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\iiint\limits_{G^*}\rho^3\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin\theta\,d\rho d\varphi d\theta=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\rho^3 d\rho=$$

$$=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d(\sin\varphi)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d(\sin\theta)\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\rho^3 d\rho=8\left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\sqrt{2}}^{2}=6.$$

Відповідь: $J=6$.

Приклад 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{G}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$, $y=0$.

Розв'язок. Оскільки область G обмежена поверхнями $S_1:\ y=\sqrt{1-x^2-z^2}$ – півсфера з центром в точці $O(0,0,0)$ і радіусом $R=1$ (рис. 18); $S_2:\ y=0$ – площина Oxz, то перейдемо до **сферичної системи координат**:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\theta, \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2,$$
$$dxdydz=\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

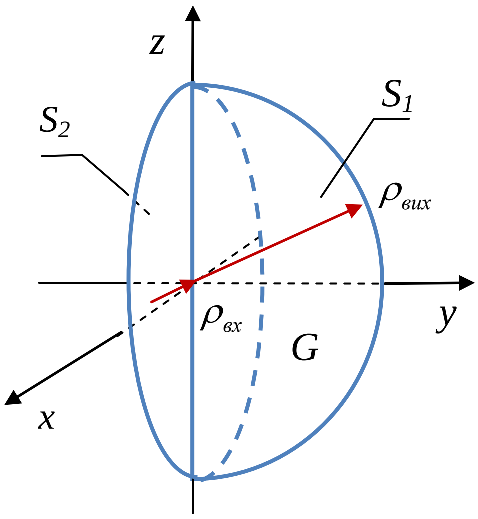


Рис. 18

Область інтегрування в сферичній системі координат буде мати такий вигляд

$$G^*=\{(\rho,\varphi,\theta):\ \ 0\le\varphi\le\pi,\ \ 0\le\theta\le\pi,\ \ 0\le\rho\le 1\}.$$

За формулою переходу від декартової до сферичної системи координат отримаємо

$$J=\iiint\limits_{G}\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,dxdydz\overset{CCK}{=}\iiint\limits_{G^*}\frac{\rho\cos\theta\ln(\rho^2+1)}{\rho^2+1}\rho^2\sin\theta\,d\varphi d\theta d\rho=$$

$$=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^1\frac{\ln(\rho^2+1)}{\rho^2+1}\rho^3d\rho=-\varphi\Big|_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta d(\cos\theta)\int_0^1\frac{\ln(\rho^2+1)}{2(\rho^2+1)}\rho^2 2\rho\,d\rho=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} t=\rho^2+1, & \rho^2=t-1, \\ 2\rho d\rho=dt, & \begin{array}{c|c|c} \rho & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array}\end{array}\right|=-\pi\frac{\cos^2\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi}\cdot\int_1^2\frac{\ln t}{2t}(t-1)dt=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\cos^2\theta\Big|_0^{\pi}\cdot\int_1^2\frac{(t-1)}{t}\ln t dt=-\frac{\pi}{4}(1-1)\cdot\int_1^2\frac{(t-1)}{t}\ln t dt=0.$$

Відповідь: $J=0$.

Приклад 7. Обчислити масу тіла із густиною $\mu(x,y,z)=5z$, яке обмежене поверхнями $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2=9z^2$ $(z\geq 0)$, $x=0$, $y=0$.

Розв'язок. Побудуємо тіло G (рис. 19), яке обмежене поверхнями:

S_1: $x^2+y^2+z^2=16$ – сфера з центром в точці O(0,0,0) і радіусом $R=4$;

S_2: $x^2+y^2=9z^2$ – конус з центром в точці O(0,0,0);

S_3: $x=0$, S_4: $y=0$ – координатні площини Oyz, Oxz.

Розв'яжемо задачу двома способами: в циліндричній та сферичній системах координат.

1-й спосіб. Перейдемо до **циліндричної системи**

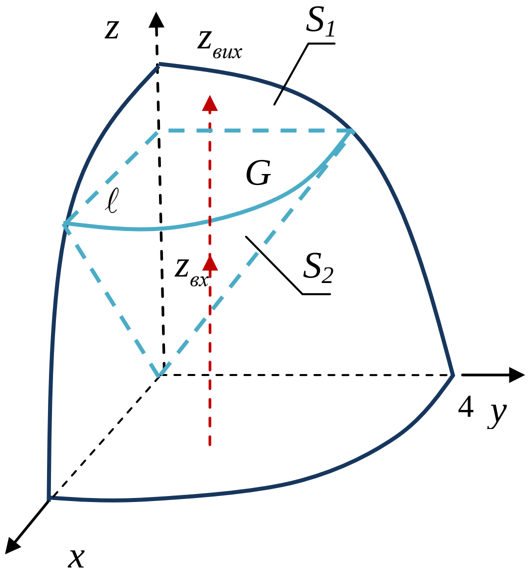


Рис. 19

координат

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x^2+y^2=\rho^2, \\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz. \end{array}$$

Запишемо рівняння кожної поверхні в циліндричній системі координат:

$$S_1: \quad \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2 sin^2\varphi+z^2=16 \quad \Rightarrow \quad z=\sqrt{16-\rho^2}\,;$$

$$S_2: \quad 9z^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2 sin^2\varphi \quad \Rightarrow \quad z=\frac{\rho}{3}.$$

Знайдемо лінію ℓ перетину поверхонь S_1 та S_2:

$$\begin{cases} z=\sqrt{16-\rho^2}, \\ z=\dfrac{\rho}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho^2}{9}+\rho^2=16, \\ z=\dfrac{\rho}{3} \end{cases} \Rightarrow \ \ell: \begin{cases} \rho=\dfrac{12}{\sqrt{10}}, \\ z=\dfrac{4}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Отже, ℓ — коло радіуса $\mathrm{R}=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$, яке лежить у площині $z=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Область інтегрування в циліндричній системі координат буде мати такий вигляд

$$G^*=\left\{(\rho,\varphi,z):\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\rho\le\frac{12}{\sqrt{10}},\quad \frac{\rho}{3}\le z\le\sqrt{16-\rho^2}\right\}.$$

Масу неоднорідного тіла з густиною $\mu(x,y,z)$, обчислюємо за формулою

$$m=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)dxdydz.$$

Використовуючи формулу обчислення потрійного інтеграла в циліндричній системі координат, отримаємо

$$m_G=\iiint\limits_{G^*}\mu(\varphi,\rho,z)\rho d\rho d\varphi dz=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho}{3}}^{\sqrt{16-\rho^2}}zdz=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}}\rho\left.\frac{z^2}{2}\right|_{\frac{\rho}{3}}^{\sqrt{16-\rho^2}}d\rho=$$

$$=5\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}}\rho(16-\rho^2-\frac{\rho^2}{9})d\rho=5\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}}(16\rho-\frac{10\rho^3}{9})d\rho=5\frac{\pi}{4}\left.(8\rho^2-\frac{5\rho^4}{18})\right|_0^{\frac{12}{\sqrt{10}}}=$$

$$=5\frac{\pi}{4}\left(\frac{8\cdot 144}{10}-\frac{5\cdot 144^2}{18\cdot 100}\right)=72\pi\,\text{(од. маси)}.$$

2-й спосіб. Перейдемо до **сферичної системи координат**:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=\rho^2, \\ dxdydz=\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta. \end{array}$$

Рівняння поверхонь S_1 та S_2 у сферичній системі координат будуть мати такий вигляд:

$$S_1:\quad x^2+y^2+z^2=16 \quad\Rightarrow\quad \rho=4;$$

$$S_2:\quad x^2+y^2=9z^2 \quad\Rightarrow\quad \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta=9\rho^2\cos^2\theta \quad\Rightarrow$$

$$\rho^2\sin^2\theta=9\rho^2\cos^2\theta \quad\Rightarrow\quad 1-\cos^2\theta=9\cos^2\theta \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta=\frac{1}{10} \quad\Rightarrow$$

$$S_2:\quad \theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Запишемо область інтегрування в сферичній системі координат

$$G^*=\left\{(\rho,\varphi,\theta):\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\theta\le\arccos\frac{1}{\sqrt{10}},\quad 0\le\rho\le 4\right\}.$$

Використовуючи формулу обчислення маси неоднорідного тіла з густиною $\mu(\varphi,\theta,\rho)=5\rho\cos\theta$ та формулу обчислення потрійного інтеграла у сферичній системі координат, отримаємо

$$m_G=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdydz \overset{CCK}{=} \iiint\limits_{G^*}\mu(\varphi,\theta,\rho)\rho^2\sin\theta\, d\varphi d\theta d\rho=$$

$$=5\iiint\limits_{T^*}\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin\theta\, d\varphi d\theta d\rho=5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}\cos\theta\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^4\rho^3 d\rho=$$

$$=-5\frac{\pi}{2}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^4\cdot\int\limits_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}\cos\theta d(\cos\theta)=-160\pi\frac{\cos^2\theta}{2}\bigg|_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}=$$

$$=-80\pi(\frac{1}{10}-1)=72\pi \text{ (од. маси)}.$$

Відповідь: $m_G = 72\pi$ (од. маси).

Приклад 8. Густина сфери $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$ в будь-якій її точці дорівнює квадрату відстані цієї точки від початку координат. Знайти координати центра маси сфери.

Розв'язок. Побудуємо задану поверхню (рис. 20)

$S: \quad x^2+y^2+z^2-2Rz+R^2 \le R^2 \quad \Rightarrow$
$x^2+y^2+(z-R)^2 \le R^2$ — сфера з ценром в точці $O_1(0,0,R)$ і радіусом R.

Масу та координати центра маси неоднорідного тіла з густиною $\mu(x,y,z)$ будемо шукати за формулами :

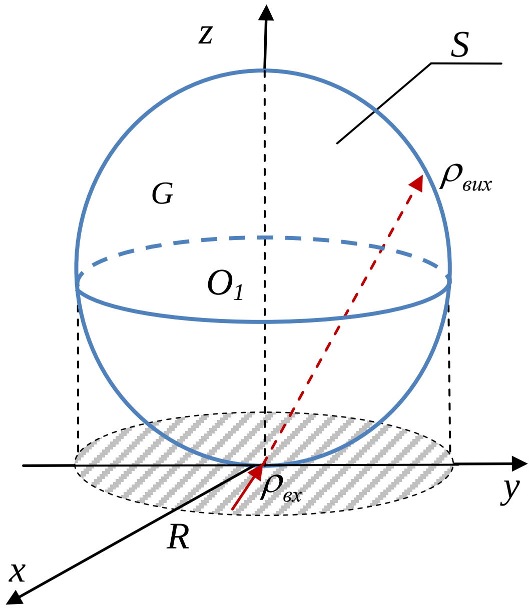


Рис. 20

$$m=\iiint\limits_G \mu(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{1}{m}\iiint\limits_G x\cdot\mu(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\bar{y}=\frac{M_{zx}}{m}=\frac{1}{m}\iiint\limits_G y\cdot\mu(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{1}{m}\iiint\limits_G z\cdot\mu(x,y,z)\,dxdydz.$$

Оскільки задане тіло симетричне відносно координатних площин Oxz та Oyz, то центр його маси лежатиме на осі Oz, тобто $\bar{x}=\bar{y}=0$.

За умовою задачі густина в кожній точці визначається функцією

$$\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z^2.$$

Перейдемо до **сферичної системи координат:**

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \\ & dxdydz = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Рівняння поверхні S та області інтегрування G^* у сферичній системі координат будуть мати такий вигляд

$$S: \quad \rho^2 = 2R\rho\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \rho = 2R\cos\theta.$$

$$G^* = \left\{(\rho,\varphi,\theta): \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \rho \le 2R\cos\theta\right\}.$$

Знайдемо масу тіла за формулою переходу від декартової до сферичної системи координат

$$m = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz \overset{CCK}{=} \iiint\limits_{G^*} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\theta\, d\varphi d\theta d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^4 d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^{2R\cos\theta} d\theta =$$

$$= -\frac{2\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^5 R^5 \cos^5\theta d\cos\theta = -\frac{2^6 R^5 \pi}{5} \cdot \left.\frac{\cos^6\theta}{6}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32R^5\pi}{15} \text{ (од. маси).}$$

Обчислимо статичний момент тіла відносно площини Oxy

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\mu(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_G z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz \overset{CCK}{=}$$

$$= \iiint\limits_{G^*} \rho^3 \cos\theta \cdot \rho^2 \sin\theta\, d\varphi d\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^5 d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \left.\frac{\rho^6}{6}\right|_0^{2R\cos\theta} d\theta = -\frac{2^7 R^6 \pi}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\theta\, d(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{2^7 R^6 \pi}{6} \cdot \left.\frac{\cos^8\theta}{8}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8R^6\pi}{3}.$$

Отже, $$\bar{z} = \frac{1}{m} M_{xy} = \frac{15}{32R^5\pi} \cdot \frac{8R^6\pi}{3} = \frac{5R}{4}.$$

Відповідь: координати центра маси $\left(0,0,\frac{5R}{4}\right)$.

Приклад 9. Знайти масу, статичний момент відносно площини Oxy, координати центра маси і момент інерції відносно площини Oxy однорідного тіла, обмеженого повехнями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=0 \quad (z\geq 0)$.

Розв'язок. Побудуємо тіло G (рис. 21), яке обмежене поверхнями:

$S_1: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — еліпсоїд з ценром в точці $O(0,0,0)$ і півосями a, b, c;

$S_2: \quad z=0$ – координатна площина Oxy.

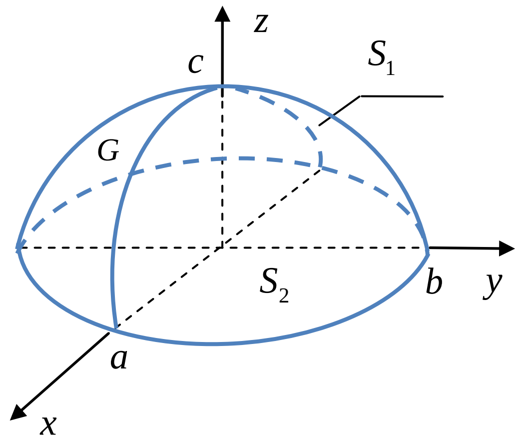


Рис. 21

1. Масу півеліпсоїда з густиною $\mu(x,y,z)=\mu_0$ будемо шукати за формулою :

$$m=\mu_0\iiint\limits_G dxdydz\,.$$

Перейдемо до **узагальненої сферичної системи координат:**

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=c\rho\cos\theta, \end{cases}$$

$$dxdydz=abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Запишемо рівняння поверхні S_1 в узагальненої сферичній системі координат.

$$S_1: \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\cancel{a^2}\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta}{\cancel{a^2}}+\frac{\cancel{b^2}\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}{\cancel{b^2}}+\frac{\cancel{c^2}\rho^2\cos^2\theta}{\cancel{c^2}}=1 \quad \Rightarrow$$

$$\rho^2((\cos^2\varphi\underline{\sin^2\theta}+\sin^2\varphi\underline{\sin^2\theta})+\cos^2\theta)=1 \quad \Rightarrow \quad \rho^2=1 \quad \Rightarrow \quad \rho=1.$$

Опишемо область інтегрування G^* в узагальненої сферичній системі координат

$$G^*=\left\{(\rho,\varphi,\theta):\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\rho\le 1\right\}.$$

За формулою переходу від декартової до узагальненої сферичної системи координат, знайдемо масу тіла

$$m=\mu_0\iiint\limits_G dxdydz\overset{УССК}{=}\mu_0 abc\iiint\limits_{G^*}\rho^2\sin\theta\,d\varphi d\theta d\rho=$$

$$=\mu_0 abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^1\rho^2 d\rho=\mu_0 abc2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1 d\theta=$$

$$=-\mu_0\frac{2\pi}{3}abc\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\mu_0\frac{2\pi}{3}abc\,\text{(од. маси)}.$$

2. Обчислимо статичний момент матеріального тіла відносно площини Oxy

$$M_{xy}=\mu_0\iiint\limits_G z\,dxdydz\overset{УССК}{=}\mu_0\iiint\limits_{G^*}c\rho\cos\theta\cdot abc\rho^2\sin\theta\,d\varphi d\theta d\rho=$$

$$=\mu_0 abc^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^1\rho^3 d\rho=2\pi\mu_0 abc^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 d\theta=$$

$$=\frac{\pi}{2}\mu_0 abc^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\sin\theta=\frac{\pi}{2}\mu_0 abc^2\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\mu_0 abc^2.$$

3. Знайдемо координати центра маси. Оскільки задане тіло симетричне відносно координатних площин Oxz та Oyz, то центр його маси лежатиме на осі Oz, тобто $\overline{x}=\overline{y}=0$. Обчислимо координату $\overline{z}$

$$\overline{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{\pi\mu_0 abc^2}{4}\cdot\frac{3}{2\pi\mu_0 abc}=\frac{3}{8}c.$$

Отже, координати центра маси $\left(0,0,\frac{3}{8}c\right)$.

4. Момент інерції матеріального тіла відносно площини Oxy будемо шукати за формулою

$$I_{xy}=\mu_0\iiint\limits_G z^2\,dxdydz\overset{УССК}{=}\mu_0\iiint\limits_{G^*}c^2\rho^2\cos^2\theta\cdot abc\rho^2\sin\theta\,d\varphi d\theta d\rho=$$

$$=\mu_0 abc^3\iiint\limits_{G^*}\rho^4\cos^2\theta\sin\theta\,d\varphi d\theta d\rho=\mu_0 abc^3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^1\rho^4 d\rho=$$

$$=2\pi\mu_0 abc^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\left.\frac{\rho^5}{5}\right|_0^1 d\theta=-\frac{2\pi}{5}\mu_0 abc^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d(\cos\theta)=$$

$$=-\frac{2\pi}{5}\mu_0 abc^3\left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{15}\mu_0 abc^3.$$

Отже, $$I_{xy}=\frac{2\pi}{15}\mu_0 abc^3.$$

Відповідь:

1. $m=\mu_0\dfrac{2\pi}{3}abc$ (од. маси);

2. Статичний момент тіла відносно площини Oxy $M_{xy}=\dfrac{\pi}{4}\mu_0 abc^2$;

3. Координати центра маси $\left(0,0,\dfrac{3}{8}c\right)$;

4. Момент інерції тіла відносно площини Oxy $I_{xy}=\dfrac{2\pi}{15}\mu_0 abc^3$.

Зауваження. Для студентів, які прагнуть якісно засвоїти цю тему вищої математики, бажають набути вмінь та навичок, можемо порекомендувати наступну літературу [2], [4].

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст]: учебник для вузов / Яков Степанович Бугров, Сергей Михайлович Никольский; [предисл. авторов]. – 3-е изд., испр. – М.: Наука; Главная редакция физико-матем. литературы, 1989. – 464 с.: ил.; 21 см. – Предм. указ.: с. 461–464 . – 126000 экз. – ISBN 5–02–013925–4
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учебное пособие для вузов в 2-х ч. Ч. II / Павел Ефимович Данко, Александр Георгиевич Попов, Татьяна Яковлевна Кожевникова. – Изд. 5-е, исп. – М.: Высш. шк., 1996. – 416 с.: ил.; 21 см. – Библиогр.: с. 416 . – 10000 экз. – ISBN 5–06–003071–7 (ч. II). – ISBN 5–06–003072.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов [Текст]: учебник для вузов /. Том I - II. – М. Наука, 1972, 1978.
4. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. [Текст]: учебник для вузов / Ч. 1-5. – Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967–1972.
5. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: Тридцать пять лекций. 2 часть / Дмитрий Письменный; [вступ. ст. автора] – М.: Рольф, 2002. – 256 с.: ил; 21 см. – 10000 экз. – ISBN 5–7836–0312–0.

ЗМІСТ